



Documento de Trabajo No. 11/15
Octubre 2015

**Análisis Combinatorio para la Construcción
de un Indicador de Pobreza
Multidimensional**

por:
Gary Canarivi, Horacio Villegas Q.
y Javier Aliaga Lordemann

1. Introducción

Una rama importante de las políticas públicas se concentra en la inclusión social y la reducción de la pobreza, esto debido a que más de 1.200 millones de personas viven con 1,25 dólares al día o menos (*Naciones Unidas, Objetivos de Desarrollo, 2015*). Asimismo, estimaciones del Índice de Pobreza Multidimensional del PNUD (*Informe anual del Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo, Tokio 2014*) revelan que casi 1.500 millones de personas, de 91 países en desarrollo, viven en situación de pobreza multidimensional, con carencias concurrentes en salud, educación y nivel de vida.

En Bolivia la pobreza monetaria muestra una tendencia decreciente a partir del año 2005, con una tasa de reducción promedio de 4.5% al año, que representa a 253,364 personas pobres (*La evolución de la pobreza en Bolivia: un enfoque multidimensional, Paul Villaruel y Hernani Limarino, 2013*). Por otro lado, los resultados sobre pobreza multidimensional muestran que esta se ha reducido en 24 puntos porcentuales durante el periodo 1999-2011, pero también, se evidencia un aumento de las personas con vulnerabilidad social por el comportamiento elusivo de la pobreza no monetaria en el país.

A pesar de que las medidas presentadas anteriormente permiten examinar la tendencia de la pobreza monetaria y las características de la pobreza multidimensional, existen algunos inconvenientes con su aplicación; la no existencia de una combinación de elementos objetivos ni subjetivos, la falta de herramientas de análisis ante cambios de atributos por dimensión de pobreza, etc.

En consecuencia, es importante construir un modelo que aporte información complementaria. La *inducción* y la *conjetura de elementos*, permiten la inclusión y el análisis de factores como el trabajo, la salud, la educación, etc., (*perspectiva multidimensional*). Por otro lado, los cambios de atributos en dimensiones por individuo reflejan permutaciones de datos que se pueden analizar a través del estudio de la *combinatoria*. Finalmente, la *teoría de conjuntos* permite la combinación de elementos objetivos y subjetivos del estado de la Pobreza individual y general.

2. Desarrollo de Modelos de Pobreza Multidimensional

En esta sección se desarrollan modelos de Pobreza multidimensional, en ellos se encontrará la probabilidad del movimiento de atributos por individuo en todas las dimensiones.

Sea X una matriz, con elementos $x_{ij} \in X$, donde x_{ij} es la cantidad (entero positivo) que la persona i posee del bien o atributo correspondiente a la dimensión j . Las filas de la matriz están representadas por los individuos (i), y las columnas por las dimensiones (j) (*filas = individuos, columnas = dimensiones*). Para cada dimensión se cuenta con una línea de pobreza z_j .

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \dots & x_{1j} \\ x_{21} & & & & x_{2j} \\ x_{31} & & & & x_{3j} \\ x_{41} & & \ddots & & x_{4j} \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & x_{i3} & x_{i4} \dots & x_{ij} \end{bmatrix}$$

Un individuo x_{ij} se considerará pobre en alguna dimensión j si y solo si $x_{ij} < z_j$.
 Dada una matrix

$$A = [x_{11} \quad x_{12}]$$

Un individuo con dos dimensiones, y además suponemos que es pobre simultáneamente en las dos dimensiones, por lo tanto resulta $x_{11} < z_1$ y $x_{12} < z_2$, donde z_1 y z_2 son Líneas de Pobreza de la primera y segunda dimensión respectivamente. El individuo es pobre multidimensional en ambas dimensiones, pero cabe mencionar que solo se midió si es Pobre Multidimensionalmente o no, y no se pudo evaluar la intensidad de los valores que generará una probabilidad mayor o menor de caer en Pobreza Multidimensional, es decir, más allá de encontrar un resultado binario (**Pobre = 1, No Pobre = 0**) lo que el documento pretende mostrar es un análisis real de Pobreza, y una tendencia probabilística de caer en Pobreza Multidimensional en todas las dimensiones simultáneamente, para ello es necesario evaluar cada atributo de todas las dimensiones del individuo.

De las cantidades x_{11} ó x_{12} es posible que disten ciertas unidades ya sea una mayor a otra, en relación a las líneas de pobreza, es decir

$$(x_{11} \leq x_{12}) < (z_1 \leq z_2) \text{ ó } (x_{11} \geq x_{12}) < (z_1 \geq z_2)$$

Por lo tanto, lo que se medirá es la intensidad de los valores a diferentes cambios de unidades entre esos atributos en relación a las Líneas de Pobreza, en otras palabras la probabilidad de que el individuo incurra en Pobreza Multidimensional en ambas dimensiones simultáneamente, ya sea para matrices $X = [x_{11} + x_{12} + x_{13} + \dots + x_{1n}]$ de 2, 3, hasta n dimensiones.

3. Conjeturación para un modelo de “ n ” dimensiones

Dada la siguiente distribución $x_{11} + x_{12} + x_{13} + \dots + x_{1n} = w$ y las líneas de Pobreza para cada dimensión z_j . La probabilidad de incidencia en Pobreza Multidimensional en todas las dimensiones para el individuo $i = 1$ está dada por la siguiente expresión.

$$P_n(X, z) = \frac{r}{m}$$

Donde r es el número de combinaciones posibles que cumplen la condición $x_{11} + x_{12} + x_{13} + \dots + x_{1n} = w$, donde cada x_{ij} se encuentre por debajo de cada línea de pobreza z_j y m será todas las combinaciones de $x_{11} + x_{12} + x_{13} + \dots + x_{1n} = w$.

Usamos el análisis combinatorio para poder contar las combinaciones posibles de $x_{11} + x_{12} + x_{13} + \dots + x_{1n}$, los patrones de permutación de los elementos de cada fila de la matriz X siguen un ritmo de (**permutaciones con repeticiones**), por lo tanto se debe desarrollar las ordenaciones de un número determinado de elementos, se hará un modelo del problema en base a un algoritmo de **rayas y asteriscos** que nos facilitará encontrar una generalización al mismo.

Se supone el siguiente algoritmo de asteriscos y rayas:

| * * * |

A la izquierda de “ | “ está la primera columna de la matriz X, entre las “ | “ está la segunda columna de la matriz X, y finalmente al lado derecho de la última “ | “ está la tercera columna de la matriz. Los asteriscos son elementos iguales, que al contarlos nos dan una cierta cantidad, ej., el algoritmo | * * * | nos refleja que en la primera columna no existe cantidad alguna, en la segunda columna hay tres asteriscos, que es lo mismo a 3 unidades, y en la tercera columna no existen cantidades.

[0 3 0]

Veamos otro algoritmo.

* | * * * | *

La relación de la figura nos refleja

[1 3 1]

Es necesario introducir este sistema ya que la forma de ver las repeticiones tanto en la matriz como en el sistema de asteriscos y rayas llevan la misma estructura de análisis, por lo tanto m será la permutación de w elementos repetidos con $(n - 1)$ elementos repetidos, es decir

$$P_n(X, z) = \frac{PR_{w+(n-1)}^{w,(n-1)} - B^C}{PR_{w+(n-1)}^{w,(n-1)}}$$

Donde $r = B = PR_{w+(n-1)}^{w,(n-1)} - B^C$, debido a que en la estructura de los conjuntos B y B^C , el conjunto B tiene los elementos del conjunto solución y que además cumple con las condiciones del problema, es decir $r \in B$, el conjunto A es el (**conjunto universo**) que tiene a todos los elementos permutados, es decir $m \in A$.

$$B = A - B^C$$

Por lo tanto, se debe encontrar las permutaciones del conjunto B^C , donde las combinaciones de los elementos B^C son aquellos elementos que se encuentran por encima de la línea de pobreza z_j .

Para hallar el conjunto B^C seguimos los siguientes pasos:

Paso 1

Analizar el conjunto B^C y evaluar los elementos que se encuentren por encima de las líneas de pobreza.

Paso 2

Llamar delta (Δ) a las cantidades de igual magnitud que las líneas de pobreza, ya que a partir de ese límite se cumplirá el Paso 1.

$\Delta_1 \Rightarrow$ *primera dimensión*

$\Delta_2 \Rightarrow$ *segunda dimensión*

$\Delta_3 \Rightarrow$ *tercera dimensión*

\vdots

$\Delta_n \Rightarrow$ *enésima dimensión*

Luego, hallar las combinaciones posibles mayores a cada línea de pobreza

Δ_1 | ***** | ** | ***** | *****

Para la segunda dimensión

***** | Δ_2 | ** | ***** | *****

Y así sucesivamente, para luego sumar las permutaciones donde cada valor de las líneas de pobreza queden fijas en cada dimensión.

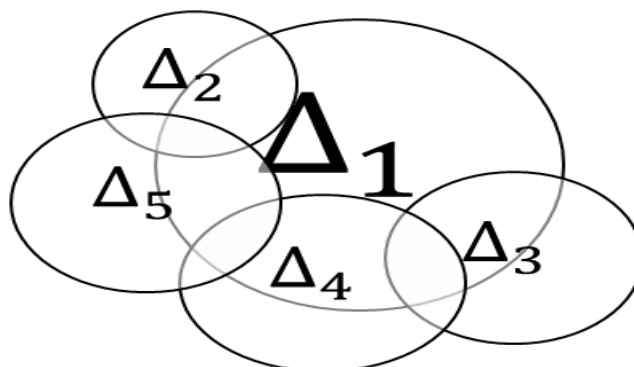
* | ***** | ** | ** | ... | Δ_n

$$PR_{(w-z_1)+(n-1)}^{(w-z_1),(n-1)} + PR_{(w-z_2)+(n-1)}^{(w-z_2),(n-1)} + \dots + PR_{(w-z_n)+(n-1)}^{(w-z_n),(n-1)}$$

Paso 3

De hecho, en las permutaciones tomadas anteriormente (paso 2), se analizó los valores por dimensión que se encuentran por encima de los valores de las líneas de pobreza, sería erróneo sumar todos esos valores (paso 2) y restarlos del conjunto A para así llegar a la respuesta, ya que en los valores contados en el paso anterior, existen combinaciones que son contadas varias veces. Reflejamos la situación en el siguiente diagrama, por lo tanto en este paso se tratará de eliminar esas combinaciones.

Gráfico 1: Intersección de los conjuntos $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5$



Fuente: Elaboración Propia

Eliminando las intersecciones del conjunto de la primera dimensión Δ_1 en relación a los otros conjuntos, ejemplo para la intersección de Δ_1 y Δ_2 .

$$\Delta_1 | \Delta_2 | ** | ***** | ****$$

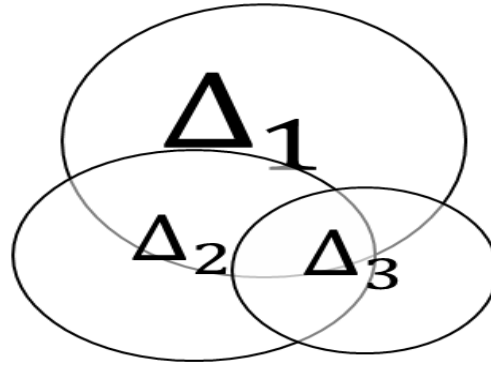
Luego, se suman las permutaciones, el cual la primera dimensión es analizada respecto a otra

$$\Delta_1 | ** | \Delta_3 | ** | \dots |$$

$$PR_{(w-z_1-z_n)+(n-1)}^{(w-z_1-z_2),(n-1)} + PR_{(w-z_1-z_n)+(n-1)}^{(w-z_1-z_3),(n-1)} + \dots + PR_{(w-z_1-z_n)+(n-1)}^{(w-z_1-z_n),(n-1)}$$

Por otro lado, al descontar la intersección de Δ_2 y Δ_3 , también se redujeron aquellos elementos tomados en la intersección de Δ_1 y Δ_2 . Para ello se debe aumentar la intersección de Δ_1, Δ_2 y Δ_3 .

Gráfico 2: Intersección de los conjuntos $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$



Fuente: Elaboración Propia

$$PR_{(w-z_2-z_3)+(n-1)}^{(w-z_2-z_3),(n-1)} - \left(PR_{(w-z_1-z_2-z_3)+(n-1)}^{(w-z_1-z_2-z_3),(n-1)} \right) + PR_{(w-z_2-z_4)+(n-1)}^{(w-z_2-z_4),(n-1)}$$

$$- \left(PR_{(w-z_1-z_2-z_4)+(n-1)}^{(w-z_1-z_2-z_4),(n-1)} \right) + \dots + PR_{(w-z_2-z_n)+(n-1)}^{(w-z_2-z_n),(n-1)}$$

$$- \left(PR_{(w-z_1-z_2-z_n)+(n-1)}^{(w-z_1-z_2-z_n),(n-1)} \right)$$

Así, sucesivamente y manteniendo la lógica del ejemplo anterior se analizan para la tercera, la cuarta, hasta llegar a la enésima dimensión respecto a las demás.

$$PR_{(w-z_3-z_4)+(n-1)}^{(w-z_3-z_4),(n-1)}$$

$$- \left(PR_{(w-z_1-z_3-z_4)+(n-1)}^{(w-z_1-z_3-z_4),(n-1)} + PR_{(w-z_2-z_3-z_4)+(n-1)}^{(w-z_2-z_3-z_4),(n-1)} \right)$$

$$- PR_{(w-z_1-z_2-z_3-z_4)+(n-1)}^{(w-z_1-z_2-z_3-z_4),(n-1)} + \dots + PR_{(w-z_3-z_n)+(n-1)}^{(w-z_3-z_n),(n-1)}$$

$$- \left(PR_{(w-z_1-z_3-z_n)+(n-1)}^{(w-z_1-z_3-z_n),(n-1)} + PR_{(w-z_2-z_3-z_n)+(n-1)}^{(w-z_2-z_3-z_n),(n-1)} \right)$$

$$- PR_{(w-z_1-z_2-z_3-z_n)+(n-1)}^{(w-z_1-z_2-z_3-z_n),(n-1)}$$

Para z_5

$$\begin{aligned}
& PR_{(w-z_4-z_5)+(n-1)}^{(w-z_4-z_5),(n-1)} \\
& - \left(PR_{(w-z_1-z_4-z_5)+(n-1)}^{(w-z_1-z_4-z_5),(n-1)} + PR_{(w-z_2-z_4-z_5)+(n-1)}^{(w-z_2-z_4-z_5),(n-1)} + PR_{(w-z_3-z_4-z_5)+(n-1)}^{(w-z_3-z_4-z_5),(n-1)} \right. \\
& - PR_{(w-z_1-z_2-z_4-z_5)+(n-1)}^{(w-z_1-z_2-z_4-z_5),(n-1)} - PR_{(w-z_1-z_3-z_4-z_5)+(n-1)}^{(w-z_1-z_3-z_4-z_5),(n-1)} \\
& - PR_{(w-z_2-z_3-z_4-z_5)+(n-1)}^{(w-z_2-z_3-z_4-z_5),(n-1)} + PR_{(w-z_1-z_2-z_3-z_4-z_5)+(n-1)}^{(w-z_1-z_2-z_3-z_4-z_5),(n-1)} \left. \right) + \dots \\
& + PR_{(w-z_4-z_n)+(n-1)}^{(w-z_4-z_n),(n-1)} \\
& - \left(PR_{(w-z_1-z_4-z_n)+(n-1)}^{(w-z_1-z_4-z_n),(n-1)} + PR_{(w-z_2-z_4-z_n)+(n-1)}^{(w-z_2-z_4-z_n),(n-1)} + PR_{(w-z_3-z_4-z_n)+(n-1)}^{(w-z_3-z_4-z_n),(n-1)} \right. \\
& - PR_{(w-z_1-z_2-z_4-z_n)+(n-1)}^{(w-z_1-z_2-z_4-z_n),(n-1)} - PR_{(w-z_1-z_3-z_4-z_n)+(n-1)}^{(w-z_1-z_3-z_4-z_n),(n-1)} \\
& - PR_{(w-z_2-z_3-z_4-z_n)+(n-1)}^{(w-z_2-z_3-z_4-z_n),(n-1)} + PR_{(w-z_1-z_2-z_3-z_4-z_n)+(n-1)}^{(w-z_1-z_2-z_3-z_4-z_n),(n-1)} \left. \right)
\end{aligned}$$

Para z_6

$$\begin{aligned}
& PR_{(w-z_5-z_6)+(n-1)}^{(w-z_5-z_6),(n-1)} \\
& - \left(PR_{(w-z_1-z_5-z_6)+(n-1)}^{(w-z_1-z_5-z_6),(n-1)} + PR_{(w-z_2-z_5-z_6)+(n-1)}^{(w-z_2-z_5-z_6),(n-1)} + PR_{(w-z_3-z_5-z_6)+(n-1)}^{(w-z_3-z_5-z_6),(n-1)} \right. \\
& + PR_{(w-z_4-z_5-z_6)+(n-1)}^{(w-z_4-z_5-z_6),(n-1)} - PR_{(w-z_1-z_2-z_5-z_6)+(n-1)}^{(w-z_1-z_2-z_5-z_6),(n-1)} \\
& - PR_{(w-z_1-z_3-z_5-z_6)+(n-1)}^{(w-z_1-z_3-z_5-z_6),(n-1)} - PR_{(w-z_1-z_4-z_5-z_6)+(n-1)}^{(w-z_1-z_4-z_5-z_6),(n-1)} \\
& - PR_{(w-z_2-z_3-z_5-z_6)+(n-1)}^{(w-z_2-z_3-z_5-z_6),(n-1)} - PR_{(w-z_2-z_4-z_5-z_6)+(n-1)}^{(w-z_2-z_4-z_5-z_6),(n-1)} \\
& - PR_{(w-z_3-z_4-z_5-z_6)+(n-1)}^{(w-z_3-z_4-z_5-z_6),(n-1)} + PR_{(w-z_1-z_2-z_3-z_5-z_6)+(n-1)}^{(w-z_1-z_2-z_3-z_5-z_6),(n-1)} \\
& + PR_{(w-z_1-z_2-z_4-z_5-z_6)+(n-1)}^{(w-z_1-z_2-z_4-z_5-z_6),(n-1)} + PR_{(w-z_1-z_3-z_4-z_5-z_6)+(n-1)}^{(w-z_1-z_3-z_4-z_5-z_6),(n-1)} \\
& + PR_{(w-z_2-z_3-z_4-z_5-z_6)+(n-1)}^{(w-z_2-z_3-z_4-z_5-z_6),(n-1)} - PR_{(w-z_1-z_2-z_3-z_4-z_5-z_6)+(n-1)}^{(w-z_1-z_2-z_3-z_4-z_5-z_6),(n-1)} \left. \right) + \dots \\
& + PR_{(w-z_5-z_n)+(n-1)}^{(w-z_5-z_n),(n-1)} \\
& - \left(PR_{(w-z_1-z_5-z_n)+(n-1)}^{(w-z_1-z_5-z_n),(n-1)} + PR_{(w-z_2-z_5-z_n)+(n-1)}^{(w-z_2-z_5-z_n),(n-1)} + PR_{(w-z_3-z_5-z_n)+(n-1)}^{(w-z_3-z_5-z_n),(n-1)} \right. \\
& + PR_{(w-z_4-z_5-z_n)+(n-1)}^{(w-z_4-z_5-z_n),(n-1)} - PR_{(w-z_1-z_2-z_5-z_n)+(n-1)}^{(w-z_1-z_2-z_5-z_n),(n-1)} \\
& - PR_{(w-z_1-z_3-z_5-z_n)+(n-1)}^{(w-z_1-z_3-z_5-z_n),(n-1)} - PR_{(w-z_1-z_4-z_5-z_n)+(n-1)}^{(w-z_1-z_4-z_5-z_n),(n-1)} \\
& - PR_{(w-z_2-z_3-z_5-z_n)+(n-1)}^{(w-z_2-z_3-z_5-z_n),(n-1)} - PR_{(w-z_2-z_4-z_5-z_n)+(n-1)}^{(w-z_2-z_4-z_5-z_n),(n-1)} \\
& - PR_{(w-z_3-z_4-z_5-z_n)+(n-1)}^{(w-z_3-z_4-z_5-z_n),(n-1)} + PR_{(w-z_1-z_2-z_3-z_5-z_n)+(n-1)}^{(w-z_1-z_2-z_3-z_5-z_n),(n-1)} \\
& + PR_{(w-z_1-z_2-z_4-z_5-z_n)+(n-1)}^{(w-z_1-z_2-z_4-z_5-z_n),(n-1)} + PR_{(w-z_1-z_3-z_4-z_5-z_n)+(n-1)}^{(w-z_1-z_3-z_4-z_5-z_n),(n-1)} \\
& + PR_{(w-z_2-z_3-z_4-z_5-z_n)+(n-1)}^{(w-z_2-z_3-z_4-z_5-z_n),(n-1)} - PR_{(w-z_1-z_2-z_3-z_4-z_5-z_n)+(n-1)}^{(w-z_1-z_2-z_3-z_4-z_5-z_n),(n-1)} \left. \right)
\end{aligned}$$

Para z_n

$$\begin{aligned}
& PR_{(w-z_{n-1}-z_n)+(n-1)}^{(w-z_{n-1}-z_n),(n-1)} \\
& - \left(PR_{(w-z_1-z_{n-1}-z_n)+(n-1)}^{(w-z_1-z_{n-1}-z_n),(n-1)} + \dots + PR_{(w-z_{n-2}-z_{n-1}-z_n)+(n-1)}^{(w-z_{n-2}-z_{n-1}-z_n),(n-1)} \right. \\
& - PR_{(w-z_1-z_2-z_{n-1}-z_n)+(n-1)}^{(w-z_1-z_2-z_{n-1}-z_n),(n-1)} - \dots - PR_{(w-z_{n-3}-z_{n-2}-z_{n-1}-z_n)+(n-1)}^{(w-z_{n-3}-z_{n-2}-z_{n-1}-z_n),(n-1)} \\
& + PR_{(w-z_1-z_2-z_3-z_{n-1}-z_n)+(n-1)}^{(w-z_1-z_2-z_3-z_{n-1}-z_n),(n-1)} + \dots + PR_{(w-z_{n-4}-z_{n-3}-z_{n-2}-z_{n-1}-z_n)+(n-1)}^{(w-z_{n-4}-z_{n-3}-z_{n-2}-z_{n-1}-z_n),(n-1)} \\
& - \dots - (-1)^n PR_{(w-z_1-z_2-\dots-z_{n-1}-z_n)+(n-1)}^{(w-z_1-z_2-\dots-z_{n-1}-z_n),(n-1)} \left. \right)
\end{aligned}$$

Como observamos anteriormente, la relación de números sigue un patrón numérico, y sólo queda sumar los resultados encontrados. Por la cantidad numérica existente tratemos de

reducirlos mediante algunos cambios de variable, luego podemos conjeturar la probabilidad y encontrar B^C .

$$\begin{aligned}
B^C = & \sum_{r=1}^n PR_{(w-z_r)+(n-1)}^{(w-z_r),(n-1)} \\
& - \left(\sum_{r=2}^n PR_{(w-z_1-z_r)+(n-1)}^{(w-z_1-z_r),(n-1)} + \sum_{r=3}^n PR_{(w-z_2-z_r)+(n-1)}^{(w-z_2-z_r),(n-1)} + \sum_{r=4}^n PR_{(w-z_3-z_r)+(n-1)}^{(w-z_3-z_r),(n-1)} \right. \\
& + \sum_{r=5}^n PR_{(w-z_4-z_r)+(n-1)}^{(w-z_4-z_r),(n-1)} + \sum_{r=6}^n PR_{(w-z_5-z_r)+(n-1)}^{(w-z_5-z_r),(n-1)} \\
& - \sum_{r=3}^n PR_{(w-\xi_1^2 z-z_2-z_r)+(n-1)}^{(w-\xi_1^2 z-z_2-z_r),(n-1)} - \sum_{r=4}^n PR_{(w-\xi_1^2 z-z_3-z_r)+(n-1)}^{(w-\xi_1^2 z-z_3-z_r),(n-1)} \\
& - \sum_{r=5}^n PR_{(w-\xi_1^3 z-z_4-z_r)+(n-1)}^{(w-\xi_1^3 z-z_4-z_r),(n-1)} - \sum_{r=6}^n PR_{(w-\xi_1^4 z-z_5-z_r)+(n-1)}^{(w-\xi_1^4 z-z_5-z_r),(n-1)} \\
& + \sum_{r=4}^n PR_{(w-\xi_2^2 z-z_3-z_r)+(n-1)}^{(w-\xi_2^2 z-z_3-z_r),(n-1)} + \sum_{r=5}^n PR_{(w-\xi_2^3 z-z_4-z_r)+(n-1)}^{(w-\xi_2^3 z-z_4-z_r),(n-1)} \\
& + \sum_{r=6}^n PR_{(w-\xi_2^4 z-z_5-z_r)+(n-1)}^{(w-\xi_2^4 z-z_5-z_r),(n-1)} - \sum_{r=5}^n PR_{(w-\xi_3^3 z-z_4-z_r)+(n-1)}^{(w-\xi_3^3 z-z_4-z_r),(n-1)} \\
& \left. - \sum_{r=6}^n PR_{(w-\xi_3^4 z-z_5-z_r)+(n-1)}^{(w-\xi_3^4 z-z_5-z_r),(n-1)} + \sum_{r=6}^n PR_{(w-\xi_4^4 z-z_5-z_r)+(n-1)}^{(w-\xi_4^4 z-z_5-z_r),(n-1)} + \dots \right)
\end{aligned}$$

En la ecuación anterior introducimos una variable ξ , que refleja la siguiente situación:

$$\xi_n^m = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$$

La relación nos muestra cantidades de combinaciones de m elementos, para formar con ellos n conjuntos, ejemplo.

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=4}^n PR_{(w-\xi_1^2 z-z_3-z_r)+(n-1)}^{(w-\xi_1^2 z-z_3-z_r),(n-1)} \\
& = \left(PR_{(w-z_1-z_3-z_4)+(n-1)}^{(w-z_1-z_3-z_4),(n-1)} + PR_{(w-z_2-z_3-z_4)+(n-1)}^{(w-z_2-z_3-z_4),(n-1)} \right) + \dots \\
& + \left(PR_{(w-z_1-z_3-z_n)+(n-1)}^{(w-z_1-z_3-z_n),(n-1)} + PR_{(w-z_2-z_3-z_n)+(n-1)}^{(w-z_2-z_3-z_n),(n-1)} \right)
\end{aligned}$$

Es decir ξ_n^m nos da la cantidad de combinaciones para cada permutación, por lo mostrado continuamos con el desarrollo para obtener B^C .

$$\begin{aligned}
B^C = & \sum_{r=1}^n PR_{(w-z_r)+(n-1)}^{(w-z_r),(n-1)} \\
& - \left(\sum_{t=1}^{n-1} \sum_{r=t+1}^n PR_{(w-z_t-z_r)+(n-1)}^{(w-z_t-z_r),(n-1)} - \sum_{t=2}^{n-1} \sum_{r=t+1}^n PR_{(w-\xi_1^{t-1} z-z_t-z_r)+(n-1)}^{(w-\xi_1^{t-1} z-z_t-z_r),(n-1)} \right. \\
& + \sum_{t=3}^{n-1} \sum_{r=t+1}^n PR_{(w-\xi_2^{t-1} z-z_t-z_r)+(n-1)}^{(w-\xi_2^{t-1} z-z_t-z_r),(n-1)} - \sum_{t=4}^{n-1} \sum_{r=t+1}^n PR_{(w-\xi_3^{t-1} z-z_t-z_r)+(n-1)}^{(w-\xi_3^{t-1} z-z_t-z_r),(n-1)} \\
& \left. + \sum_{t=5}^{n-1} \sum_{r=t+1}^n PR_{(w-\xi_4^{t-1} z-z_t-z_r)+(n-1)}^{(w-\xi_4^{t-1} z-z_t-z_r),(n-1)} - \dots \right)
\end{aligned}$$

Ordenando algebraicamente, llegamos al resultado.

$$B^C = \sum_{r=1}^n PR_{(w-z_r)+(n-1)}^{(w-z_r),(n-1)} - \sum_{s=0}^{n-2} (-1)^s \sum_{t=s+1}^{n-1} \sum_{r=t+1}^n PR_{(w-\xi_s^{t-1}z-z_t-z_r)+(n-1)}^{(w-\xi_s^{t-1}z-z_t-z_r),(n-1)}$$

Reemplazamos el resultado obtenido en la ecuación $B = A - B^C$

$$B = A - B^C = PR_{w+(n-1)}^{w,(n-1)} - \left(\sum_{r=1}^n PR_{(w-z_r)+(n-1)}^{(w-z_r),(n-1)} - \sum_{s=0}^{n-2} (-1)^s \sum_{t=s+1}^{n-1} \sum_{r=t+1}^n PR_{(w-\xi_s^{t-1}z-z_t-z_r)+(n-1)}^{(w-\xi_s^{t-1}z-z_t-z_r),(n-1)} \right)$$

Por lo tanto, la probabilidad que tiene un individuo para estar en Pobreza Multidimensional en todas las dimensiones seleccionadas, según las combinaciones de los atributos por cada dimensión, dadas diferentes líneas de pobreza y una extensión hasta n dimensiones es:

$$PR_{w+(n-1)}^{w,(n-1)} [1 - P_n(X, z)] = \left(\sum_{r=1}^n PR_{(w-z_r)+(n-1)}^{(w-z_r),(n-1)} - \sum_{s=0}^{n-2} (-1)^s \sum_{t=s+1}^{n-1} \sum_{r=t+1}^n PR_{(w-\xi_s^{t-1}z-z_t-z_r)+(n-1)}^{(w-\xi_s^{t-1}z-z_t-z_r),(n-1)} \right)$$

1. COROLARIOS

Por lo expuesto anteriormente la ecuación

$$P_n(X, z) = \frac{A - B^C}{A}$$

Encuentra la probabilidad de que un individuo se encuentre en Pobreza Multidimensional en todas las dimensiones seleccionadas dado el número de posibles combinaciones que se pueden obtener permutando los atributos de todas las dimensiones.

El conjunto $\frac{A-B^C}{A}$ refleja tal situación, ahora tomemos el complemento de este conjunto,

$$1 - \frac{A - B^C}{A}$$

Ordenando algebraicamente

$$P^n(X, z) = 1 - P_n(X, z) = \frac{B^C}{A}$$

$$P^n(X, z) = \frac{B^C}{A}$$

Reemplazando

$$P^n(X, z) = \frac{\sum_{r=1}^n PR_{(w-z_r)+(n-1)}^{(w-z_r),(n-1)} - \sum_{s=0}^{n-2} (-1)^s \sum_{t=s+1}^{n-1} \sum_{r=t+1}^n PR_{(w-\xi_s^{t-1}z-z_t-z_r)+(n-1)}^{(w-\xi_s^{t-1}z-z_t-z_r),(n-1)}}{PR_{w+(n-1)}^{w,(n-1)}}$$

Esta probabilidad nos muestra la situación de un individuo *en no estar en Pobreza Multidimensional* en todas las dimensiones seleccionadas, dado el número de posibles combinaciones que se pueden obtener permutando los atributos de todas las dimensiones.

2. CONJETURACIÓN PARA UN MODELO DE “*n*” INDIVIDUOS

Veremos un corolario al primer modelo, la diferencia estará en que se tomará sólo una Línea de Pobreza ya que el análisis se hará por dimensión. En el modelo anterior vimos un desarrollo de la Pobreza Multidimensional tomando como una variable dependiente al individuo y analizando bajo ese punto de vista las dimensiones, ahora en esta segunda parte analizaremos inversamente, es decir tomaremos a la dimensión como una variable dependiente y a los individuos como una variable independiente.

$$P^m(X, z) = \frac{PR_{n+(m-1)}^{n,(m-1)} - (PR_m^{(m-1)} \cdot PR_{(n-z_j)+(m-1)}^{(n-z_j),(m-1)} - (PR_m^{(m-2)} \cdot PR_{(n-2z_j)+(m-1)}^{(n-2z_j),(m-1)} - \dots - (PR_m^{(m-2),z} \cdot PR_{(n-(m-2)z_j)+(m-1)}^{(n-(m-2)z_j),(m-1)} - PR_m^{(m-1),1} \cdot PR_{(n-(m-1)z_j)+(m-1)}^{(n-(m-1)z_j),(m-1)}))$$

Para encontrar la probabilidad de *no pobreza* en cada dimensión, bastará restar el complemento al caso general de *n* individuos.

Para todo z_j con $i = m$ individuos y con los atributos $\sum_{i=1}^n x_{ij}$, la probabilidad de no pobreza de cada dimensión en cada individuo está dada por

$$P^m(X, z) = \frac{PR_{(n-m \cdot z_j)+(m-1)}^{(n-m \cdot z_j),(m-1)}}{PR_{n+(m-1)}^{n,(m-1)}}$$

3. APLICACIÓN NUMÉRICA

3.1 DEFINICIÓN

Una de las nociones matemáticas abstractas mas remotas es la del número, y dentro de ellos el de los *números naturales o enteros positivos*: 1, 2, 3, 4, 5, etc. Con ello representamos las cantidades de objetos que se presentan en la vida cotidiana, y la combinatoria nos facilita ilustrar la necesidad de aprender estas técnicas de conteo (Pérez Segui, 2003). La combinatoria es la abstracción de un problema reducido en una fórmula con una operación básica de la aritmética como es la multiplicación (Becker, Pietrocola, & Sanchez, 1996). En el desarrollo del modelo una de las técnicas que se usa es la del conteo con repetición, a continuación su definición¹.

Dada una colección de *n* objetos a_1, a_2, \dots, a_n , llamaremos permutación a cualquier ordenación de los mismos. Por tanto, dos permutaciones serán distintas si los objetos están colocados en orden diferente.

Por ejemplo, en una colección de cinco objetos, a_1, a_2, a_3, a_4 y a_5 , dos permutaciones distintas de ellos serán:

¹ Notas de Combinatoria, Becker pág. 7 (red Olímpica, Argentina 1996)

$$a_1 a_3 a_5 a_2 a_4 \quad \text{y} \quad a_3 a_2 a_1 a_4 a_5$$

El número de permutaciones de n objetos lo designamos por P_n y su valor por el principio de multiplicación es

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n.$$

A este número se le llama factorial de n y se anota $n!$, es decir,

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Obsérvese que

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

Sea una colección de n objetos entre los que hay n_1 iguales entre sí, n_2 iguales entre sí pero distintos de los n_1 , n_3 iguales entre sí, pero distintos de los n_1 y n_2 y así sucesivamente hasta n_r iguales entre sí, pero distintos de todos los anteriores (Wilhelmi, 2005). Llamaremos permutaciones con repetición a las distintas formas de ordenarlos.

Obsérvese que dos permutaciones cualesquiera serán diferentes, cuando se diferencian, al menos, por el lugar que ocupan dos elementos distintos.

Las denotaremos por

$$PR_n^{n_1, n_2, \dots, n_r}$$

donde, $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_r = n$

El número de permutaciones con repetición de n elementos en las condiciones de la definición anterior es

$$PR_n^{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{P_n}{P_{n_1} \cdot P_{n_2} \cdot \dots \cdot P_{n_r}} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r!}$$

3.2 EJEMPLO NUMÉRICO, CASO $j = 3$ (TRES DIMENSIONES).

A continuación se muestra el desarrollo para el análisis con 3 dimensiones, para tal efecto usaremos la combinatoria ya que permutar números con tres dimensiones nos obliga a abstraer el problema, veamos un ejemplo cuando $(x_{11} + x_{12} + x_{13} = 11)$.

Dado un individuo y la condición $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 11$, con Líneas de Pobreza $z_1 = 5$, $z_2 = 3$, $z_3 = 6$, en las dimensiones 1, 2 y 3 respectivamente. Se forman las combinaciones de números x_{11}, x_{12}, x_{13} que son enteros positivos y que además cumplen la condición $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 11$.

Tabla 1: Intercambio de atributos para $(x_{11} + x_{12} + x_{13} = 11)$.

0	0	11
0	1	10
0	2	9
0	3	8
0	4	7
0	5	6
0	6	5
0	7	4
0	8	3
0	9	2
0	10	1
0	11	0
1	0	10
1	1	9
1	2	8

1	3	7
1	4	6
1	5	5
1	6	4
1	7	3
1	8	2
1	9	1
1	10	0
2	0	9
2	1	8
2	2	7
2	3	6
2	4	5
2	5	4
2	6	3

2	7	2
2	8	1
2	9	0
3	0	8
3	1	7
3	2	6
3	3	5
3	4	4
3	5	3
3	6	2
3	7	1
3	8	0
4	0	7
4	1	6
4	2	5

4	3	4
4	4	3
4	5	2
4	6	1
4	7	0
5	0	6
5	1	5
5	2	4
5	3	3
5	4	2
5	5	1
5	6	0
6	0	5
6	1	4
6	2	3

6	3	2
6	4	1
6	5	0
7	0	4
7	1	3
7	2	2
7	3	1
7	4	0
8	0	3
8	1	2
8	2	1
8	3	0
9	0	2
9	1	1
9	2	0
10	0	1
10	1	0
11	0	0

Fuente: Elaboración Propia

La probabilidad que el individuo se encuentre en Pobreza Multidimensional en las tres dimensiones es

$$P_3(X, z) = \frac{r}{m}$$

Donde r será el número de combinaciones posibles que cumplan la condición $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 11$ y que estén por debajo de las líneas de pobreza $z_1 = 5$, $z_2 = 3$ y $z_3 = 6$, m será todas las combinaciones de $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 11$.

En nuestro ejemplo

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 11$$

Algunas combinaciones serían

***** |*|** *|*****|*** *****|*****|

Que generan

[8 1 2]

[1 7 3]

[5 6 0]

Respectivamente

De esta forma es posible generar muchas combinaciones, por lo tanto para encontrar el valor de “m” solo bastará hallar el número de permutaciones posibles del sistema de **11 asteriscos** y **2 rayas** que representa la suma de $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 11$. Para ello se usa el teorema de **Número de Permutaciones con repetición**.

Por lo tanto, el Número de Permutaciones con repetición del sistema

***** |*|**

es

$$PR_{13}^{11,2} = \frac{13!}{11! \cdot 2!}$$

Por el teorema del número de permutaciones tenemos

$$13! = 13 \cdot 12 \cdot 11!$$

Reemplazando

$$PR_{13}^{11,2} = \frac{13!}{11! \cdot 2!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11!}{11! \cdot 2 \cdot 1} = \frac{13 \cdot 12}{2 \cdot 1} = 78$$

Por lo tanto $m = 78$

Para hallar el valor de r será necesario entrar a un análisis aún más complejo. Según la grilla de números mostrados anteriormente y que representan todas las permutaciones de $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 11$ se deduce que $r = 1$ (4 2 5) visto anteriormente, y es la única posibilidad de permutación que cumple $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 11$ y está por debajo de $z_1 = 5$, $z_2 = 3$ y $z_3 = 6$, para otros problemas sería una tarea muy complicada si realizamos todas las combinaciones posibles y buscamos cuál de ellas es solución a nuestro sistema, para ello se requiere una forma que nos brinde el modo más adecuado y fácil de encontrar el conjunto de posibles soluciones.

Sea el siguiente sistema de conjuntos

$$A = B \cup B^c$$

Donde A es el total de permutaciones posibles del sistema de asteriscos y rayas, que en todo caso es el valor encontrado $m = 78$, B es el conjunto de permutaciones posibles que están *por debajo* de $z_1 = 5$, $z_2 = 3$ y $z_3 = 6$, y B^c es el conjunto de permutaciones posibles que están *por encima* de $z_1 = 5$, $z_2 = 3$ y $z_3 = 6$.

Por lo tanto en el conjunto B se muestra una posible situación.

Tabla 2: Posible situación para ($z_1 < 5$, $z_2 < 3$ y $z_3 < 6$)

< 5	< 3	< 6
****	**	*****

Fuente: Elaboración Propia

Se deben permutar los asteriscos con la condición de no ser mayor ni igual a 5, 3 y 6 en la primera, segunda y tercera casilla respectivamente, y además deben cumplir con esas desigualdades simultáneamente.

El conjunto B^c tendrá una posible situación

Tabla 3: Posible situación para ($z_1 \geq 5$, $z_2 \geq 3$ y $z_3 \geq 6$)

≥ 5	≥ 3	≥ 6
*****	***	*****

Fuente: Elaboración Propia

Donde deben permutar los asteriscos con la siguiente condición; en cada casilla se debe tener una cantidad mayor o igual a 5, 3 y 6 en la primera, segunda y tercera casilla

respectivamente, y que a lo sumo cumpla con una de las tres condiciones, aquí no es necesario que se cumplan las desigualdades simultáneamente, por el hecho que este conjunto es el complemento del anterior.

Si vemos con detalle la estructura de los conjuntos B y B^c , el conjunto B tiene los elementos del conjunto solución y que además cumple con las condiciones del problema, es decir $r \in B$, el conjunto A es el (**conjunto universo**) que tiene a todos los elementos permutados, es decir $m \in A$.

$$B = A - B^c$$

Por lo tanto, se debe encontrar las permutaciones del conjunto B^c , es decir el análisis se enfoca en encontrar permutaciones de asteriscos que tengan a lo mínimo cantidades de 5, 3 y 6 en cada casilla respectivamente.

Para empezar se analiza la primera casilla, y se realiza el conteo de las soluciones en las que se obtengan cantidades de asteriscos iguales o mayores a 5.

Se presenta una posible solución

* * * * * | * * * | * * *

Para comprender el sistema se crea un conjunto Δ (**delta**) que contenga 5 asteriscos como elementos

$$\Delta = * * * * *$$

El sistema anterior se refleja como

$$\Delta | * * * | * * *$$

Por lo tanto si dejamos Δ (**delta**) en la primera casilla y permutan los demás elementos, tendremos un sistema de 8 elementos con 6 asteriscos y 2 rayas.

$$PR_8^{6,2} = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = 28$$

Se toman en cuenta las siguientes cantidades de números.

Tabla 4: Intercambio de atributos para $(x_{11} + x_{12} + x_{13} = 11)$, cuando $(x_{11} \geq 5)$.

5	0	6
5	1	5
5	2	4
5	3	3
5	4	2
5	5	1
5	6	0
6	0	5
6	1	4
6	2	3
6	3	2
6	4	1
6	5	0

7	0	4
7	1	3
7	2	2
7	3	1
7	4	0
8	0	3
8	1	2
8	2	1
8	3	0
9	0	2
9	1	1
9	2	0
10	0	1
10	1	0
11	0	0

Fuente: Elaboración Propia

Ahora, se analiza de la misma forma con la segunda casilla, es decir

****|***|****

Δ_1 (delta sub uno) representa a los 3 asteriscos de la segunda casilla

$\Delta_1 = ***$

por lo que tendremos

****| Δ_1 |****

Si mantenemos Δ_1 en la segunda casilla y permutamos los demás elementos, tendremos un sistema de 10 elementos con 8 asteriscos y 2 rayas.

$$PR_{10}^{8,2} = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = 45$$

Análogamente ocurrirá con la tercera casilla, donde Δ_2 representa a 6 asteriscos,

|**|**

$\Delta_2 = *****$

***|**| Δ_2

Por lo tanto dejemos Δ_2 en la tercera casilla y permutemos los demás elementos, lo cual tendremos un sistema de 7 elementos con 5 asteriscos y 2 rayas.

$$PR_7^{5,2} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21$$

Ahora, al unir los tres conjuntos $\Delta \cup \Delta_1 \cup \Delta_2$, éstos generan elementos repetidos como son:

Tabla 5: Elementos repetidos en el intercambio de atributos para $(x_{11} + x_{12} + x_{13} = 11)$, cuando $(x_{11} \geq 5, x_{12} \geq 3)$

5	3	3
5	4	2
5	5	1
5	6	0

Fuente: Elaboración Propia

Que son elementos tanto de los conjuntos Δ y Δ_1 . Ocurre lo mismo con Δ_1 y Δ_2

Tabla 6: Elementos repetidos en el intercambio de atributos para $(x_{11} + x_{12} + x_{13} = 11)$, cuando $(x_{12} \geq 3, x_{13} \geq 6)$

0	3	8
0	4	7
0	5	6
1	3	7
1	4	6
2	3	6
5	0	6

Fuente: Elaboración Propia

Que son elementos tanto de los conjuntos Δ_1 y Δ_2 , de forma análoga ocurrirá en la última terna (5 0 6), que es un elemento de Δ y Δ_2 . Por lo tanto, algunos elementos “x” de Δ también pertenecen al conjunto Δ_1 , es decir

$$x \in \Delta \cap \Delta_1 \text{ cuando } x \in \Delta, x \in \Delta_1$$

$$y \in \Delta_1 \cap \Delta_2 \text{ cuando } y \in \Delta_1, y \in \Delta_2$$

$$z \in \Delta \cap \Delta_2 \text{ cuando } z \in \Delta, z \in \Delta_2$$

Entonces, el conjunto B^c tiene la siguiente estructura

$$B^c = \Delta \cup \Delta_1 \cup \Delta_2 - \Delta \cap \Delta_1 \cap \Delta_2$$

Donde las intersecciones serán permutaciones de elementos de asteriscos y rayas siempre que estén fijos Δ, Δ_1 y Δ_2 .

Empecemos con el análisis, la intersección $\Delta \cap \Delta_1$, tiene la siguiente permutación

$$\Delta \cap \Delta_1 \mid * * *$$

Quedando fijos Δ y Δ_1 , en la primera y segunda columna respectivamente

$$PR_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

La intersección $\Delta_1 \cap \Delta_2$, tiene la siguiente permutación

$$* * | \Delta_1 | \Delta_2$$

Quedando fijos Δ_1, Δ_2 en la segunda y tercera columna respectivamente

$$PR_4^{2,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

Finalmente, la intersección $\Delta \cap \Delta_2$, tiene la siguiente permutación

$$\Delta | | \Delta_2$$

Quedando fijos Δ y Δ_2 , en la primera y tercera columna respectivamente

$$PR_2^{0,2} = \frac{2!}{0! \cdot 2!} = 1$$

Por lo tanto

$$B^c = (PR_8^{6,2} + PR_{10}^{8,2} + PR_7^{5,2}) - (PR_5^{3,2} + PR_4^{2,2} + PR_2^{0,2})$$

$$B^c = (28 + 45 + 21) - (10 + 6 + 1) = 77$$

Ahora se reemplaza en

$$B = A - B^c$$

Tenemos

$$B = 78 - 77 = 1$$

Finalmente se obtiene el resultado esperado $r = 1$.

Por lo tanto, la probabilidad que un individuo incida en Pobreza Multidimensional en las tres dimensiones simultáneamente es de un 1,3%, un probabilidad mínima, es casi imposible que el individuo sea pobre Multidimensional en las tres dimensiones.

$$P_3(X, z) = \frac{1}{78} = 0,013$$

4. CONCLUSIONES

A lo largo de la presente investigación se demostró la posibilidad de seccionar la población y las dimensiones de la pobreza multidimensional. Este resultado permite mejorar el problema cualitativo presente en Bourguignon y Chakravarty (2003), quienes no analizan la sensibilidad de la entrada y salida de la pobreza en función de cambios en atributos entre individuos y dimensiones.

Por otro lado, se extiende el modelo presentado por Chakravarty, Deutsch y Silver (2005) y Alkire y Foster (2007), quienes consideran la relación entre las dimensiones como factores independientes. El modelo propuesto en este trabajo, asume una relación de dependencia entre las dimensiones (ya que se analiza la suma total de éstas). De esta forma, la dependencia permite que un cambio en las unidades de los atributos afecte el resultado general.

Al igual que en el modelo de Alkire y Foster (2009, CONEVAL) los modelos desarrollados permiten distinguir la población pobre y vulnerable, y adicionalmente resuelven el problema de la sustitución de dimensiones. La idea de la dinámica de la pobreza (Decomposing Multidimensional Poverty Dynamics de Mauricio Apablaza y Gaston Yalonetzky, 2013) se complementó ya que se estudiaron las transiciones de cambios de atributos entre dimensiones e individuos.

Finalmente, los modelos desarrollados fueron analizados bajo la óptica de la lógica difusa, pues no poseen un valor máximo entre los datos de los atributos en dimensiones e individuos. Estudios posteriores que utilicen la teoría de conjuntos y la lógica difusa para la medición de la pobreza multidimensional, deberán analizar pronósticos de índices definidos entre 0 e infinito, para caracterizar el modo social de organización de la pobreza.

BIBLIOGRAFÍA

- Alarcón. (2001). Medición de las condiciones de vida. *Instituto Interamericano para el Desarrollo Social, INDES* (págs. 1-21). Banco Interamericano de Desarrollo, Series documentos de trabajo.
- Alkire, & Foster. (2007). *Counting and Multidimensional Poverty Measurement*. Working Paper Series, OPHI.
- Alkire, S. (2010). *Iniciativa de Desarrollo Humano y reducción de la pobreza*. Obtenido de Departamento de Desarrollo Internacional, Universidad de Oxford: <http://www.ophi.org.ok>
- Apablaza, M., & Yalonetsky, G. (2013). *Descomposing Multidimensional Poverty Dynamics*. Reino Unido.
- Badenés Plá, N. (2014). *El modelo de Rash aplicado a la medición multidimensional de la pobreza*. España.
- Banco Mundial. (2000). Informe sobre el desarrollo mundial 2000/2001: Lucha contra la pobreza. Washington DC. Oxford University Press.
- Becker, M., Pietrocola, N., & Sanchez, C. (1996). *Notas de Combinatoria*. Buenos Aires: Red Olímpica.
- Berenger, V., Calderón Villarreal, C., & Celestine, F. (2009). *Modelling the Distribution of Multidimensional Poverty Scores*. México.
- Bourguignon, & Chakravarty. (2003). *The measurement of multidimensional poverty*. Journal of Economic Inequality 1.
- CEPAL. (2010). *Guía para estimar la pobreza infantil*.
- Conconi, & Ham. (2008). *Pobreza Multidimensional, una aplicación a la Argentina*. Argentina: Working Papers 0057, CEDLAS.
- Conconi, A. (2004). *Pobreza Multidimensional en Argentina*. Argentina.
- CONEVAL-MÉXICO. (2009). *Generación de un índice multidimensional de pobreza*. México: Documentos de trabajo.
- Denis, A., Gallegos, F., & Sanhuesa, C. (2010). *Medición de la Pobreza Multidimensional en Chile*. Chile: Universidad Alberto Hurtado.
- Eid, A., & Aliaga Lordemann, J. (2013). "Vivir Bien" y pobreza multidimensional ¿Es posible una conciliación conceptual? *Revista Latinoamericana de Desarrollo Económico*, 231-253.
- Feller. (2010). *An introduction to Probability Theory Vol.1*. Pensilvania: Carnegie Mellon University.
- Feres, & Mancero. (2001). *Enfoques para la medición de la pobreza*. Series Estudios Estadísticos y Prospectivos No 4 CEPAL.
- Fonseca Godinez, C. E. (2010). *El enfoque de conjuntos difusos para la medición multidimensional de la pobreza*. México.
- Foster, Greer, & Thorbecke. (1984). *A class of decomposable poverty measures, Económica*. Vol. 52.
- Galindo Gómez. (2014). *Conjuntos y sistemas difusos*. España.
- Grinstead, & Snell. (2004). *Cadenas de Markov*. Colorado: CSM.
- Grupo de Río. (2007). *Compendio de mejores prácticas en la medición de la pobreza*. Santiago de Chile: Capítulo 2.
- Hurtado, A. (2010). A new technique to measure poverty using the theory of fuzzy logic. *OXFORD*.
- López Calva, L., & Rodríguez, L. (2005). *Muchos rostros, un sólo espejo: Restricciones para la medición multidimensional de la pobreza en México*. Série documentos de investigación 20, SEDESOL.
- México, I. N. (2010). *Estadísticas a propósito del día mundial de la justicia social*. México.
- Nieto Said, J. (2014). *Libro de Combinatoria*. Argentina.
- Pérez Seguí, M. L. (2003). *Combinatoria*. Distrito Federal: Cuaderno de Olimpiadas Matemáticas, UNAM, México.

- Perticara, & Sanhueza. (2008). *La compleja tarea de identificar quien es pobre*. Chile: Observatorio Económico, Universidad Alberto Hurtado.
- PNUD. (2010). *Human Progress and the rising shout*.
- Pugachev. (2001). *Introducción a la teoría de las Probabilidades*. California: UCLA.
- Reyes, C. (2012). *Apuntes de Inducción Matemática*. México.
- Rojas Aguilar, J. L. (2014). *Modelando la Pobreza Multidimensional, un análisis estocástico*. México.
- Villaruel, P., & Hernani Limarino, W. (2013). La evolución de la pobreza en Bolivia: un enfoque multidimensional. *Revista Latinoamericana de Desarrollo Económico*, 7-72.
- Wilhelmi, M. (2005). *Combinatoria y Probabilidad*. Granada: Universidad de Granada, España.